

原 著

境界要素法による 3次元ラプラス方程式の数値解法

石井孝治 山本裕陸

川崎医療福祉大学大学院 医療技術学研究科 医療情報学専攻

(平成10年 5月20日受理)

A Numerical Solution of the Three-dimensional Laplace Equation by the Boundary Element Method

Kohji ISHII and Hiromichi YAMAMOTO

*Master's Program in Medical Informatics
Graduate School of Medical Professions
Kawasaki University of Medical Welfare
Kurashiki, 701-0193, Japan
(Accepted May 20, 1998)*

Key words : boundary element, Green's formula, Dirichlet problem, Laplace equation, numerical solution of linear equations, approximation of boundary

Abstract

In the present paper, an attempt was made to find a numerical solution of the Laplace equation by boundary element methods in 3-dimensional space R^3 . First, we considered the exact and numerical solutions of the Dirichlet problem for the concentric ring domain in R^3 . In the boundary element method, the boundary of the sphere is approximated by the plane triangles. We compared numerical solutions with the exact solution and got the best approximation of the sphere denoted by G_n^* .

Next, we considered the mixed boundary problem of the Laplace equation for the unbounded domain where its boundary consists of the spheres. The exact solution of this problem is unknown. We obtained numerical solutions for the best approximation G_n^* , and give the graphic curve of these solutions. Moreover, we give the numerical solution of the 2-module for the curve family in R^3 .

要 約

本稿は、3次元空間 R^3 における境界要素法による3次元ラプラス方程式の数値解に関するものを考える。

まず、 R^3 内の同心円環領域におけるディリクレ問題の厳密解と数値解を求める。境界要素法においては境界である球面を平面三角形により近似させる。厳密解と数値解を比較し、厳密解に最も近づく近似法 G_* を得た。

次に、境界が球面である非有界領域におけるディリクレ問題を考える。この問題の厳密解は求まっていない。球面に最も近似する G_* で数値解を求め、その結果をグラフ化した。さらに、 R^3 内の曲線族に対する2-モジュールの数値解を与えた。

1. はじめに

境界要素法は、偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く方法として、差分法や有限要素法よりも新しい解法であり、特に、非有界領域における境界値問題において有力である。境界要素法では、3次元ラプラス方程式の境界値問題を、グリーンの定理を用いて、境界上の積分方程式に変換し、境界を境界要素に分割することにより、これを離散化して、係数行列の全成分が0でない連立1次方程式を解く問題に変換しこれを解く¹⁾。

3次元空間の領域を D とし、その境界 S はなめらかとする。 S 上で与えられた連続関数 f に対して、 D で調和で、境界条件 $u(P) = f(P) (P \in S)$ を満たす関数 u を求めるディリクレ問題の解の存在はよく知られている^{2),3)}。 D が同心円環領域などの基本的な領域における厳密解は求まるが、同心でない円環領域になると厳密解は求まっていない。

本論文では、まず、同心円環領域におけるディリクレ問題を境界要素法で解く。グリーンの定理より、 D 内の点 P における $u(P)$ の値を境界 S 上の積分で表し、 S を有限個の球面三角形 σ_j の和に分割し、 σ_j 上の積分を境界要素 T_j (平面三角形) 上の積分で近似する。こうして、境界 S 上の積分を境界要素 T_j 上の積分に離散化し、連立1次方程式の解により、 $u(P)$ の値を求める¹⁾。その際、球面の境界を境界要素 T_j の和で近似する方法として、従来では T_j の3節点は S 上の点でとられるが、ここでは半径方向に少し拡大した平面三角形の和で近似した。こ

うした新しい方法により数値解の精度は、2桁程度上がる事が証明された。

次に、境界が2つの球面からなる非有界領域におけるディリクレ問題を解く。この問題は領域を分割する有限要素法では数値的に解くのが困難であるし、数学的な厳密解も求まっていない。球面を新しい方法で近似し、640元1次方程式を解いた数値解の精度は、ケルビン変換を利用した方法により、小数点以下3桁まで正しいことが証明された。

さらに、非有界領域におけるラプラス方程式の混合境界値問題を解く。この解の数学的な存在性は示されているが、厳密解は求まっていない⁴⁾。境界の近似は新しい近似方法で求め、数値解の精度を上げ、結果をグラフ化し、それを視覚的に確かめた。

最後に、曲線族 Γ の2-module $M_2(\Gamma)^{3),5)}$ の数値計算をする。 $M_2(\Gamma)$ の値はフラックスに等しい。フラックスの計算をすることにより数値の結果と理論的結果⁵⁾との整合性を確かめた。

2. ディリクレ問題

2.1 問題設定

R^3 の点を $x = (x_1, x_2, x_3)$ 、距離を $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ と表す。同心円環領域 D とその境界を

$$D = \{x; 1 < |x| < 10\}$$

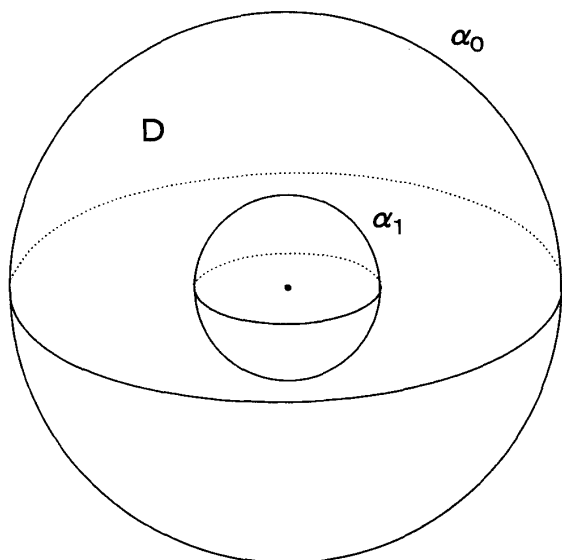
$$\alpha_0 = \{x; |x| = 10\}, \alpha_1 = \{x; |x| = 1\}$$

とする。

D におけるディリクレ問題：

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad (x \in D) \\ u &= 0 \quad (x \in \alpha_0) \\ u &= 1 \quad (x \in \alpha_1)\end{aligned}$$

を境界要素法で解く. 理論解は, $u(x) = \frac{10 - |x|}{9|x|}$ である.



2.2 球面近似

単位球面 S に内接する正20面体 G_1 は, 20個の正三角形と12個の頂点からなっている. この20個の正三角形で囲まれた正20面体 G_1 を S の第1段階の近似とする. 次に, 各正三角形を4つの正三角形に分割し, それらの各頂点を極座標の絶対値方向 (r 方向) へ単位球面上に引き上げて, 新しい4つの三角形を作る. こうして, 80個の各頂点が S 上にある三角形で囲まれた多面体領域 G_2 を S の第2段階の近似とする.

以下同様にして, $20 \times 4^{n-1}$ 個の各頂点が S 上にある三角形で囲まれた多面体領域 G_n を S の第 n 段階の近似とする.

G_n の境界と原点との距離を d_n とし, r_n を

$$\begin{aligned}r_n &= 1 + k_n \left(\frac{1}{d_n} - 1 \right) \\ k_1 &= 0.80, \quad k_2 = 0.765 \\ k_3 &= 0.74, \quad k_4 = 0.73\end{aligned}$$

とする. G_n を極座標の絶対値方向 (r 方向) へ r_n 倍したものを G_n^* とする. S, G_1, G_1^* の体積, 表面積を比較すると

	体積	表面積
S	4.189	12.566
G_1	2.536	9.575
G_1^*	4.457	13.942

となる.

2.3 境界近似による結果の検討

境界 α_0, α_1 の第1, 第4段階の近似 G_1, G_4 と, それらを拡大した近似 G_1^*, G_4^* により2.1のディリクレ問題を解いた. 次の表はそれら近似での点 $P_i = (i, 0, 0)$ における値と, flux の値 $F = \int_{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS$ と理論解を比較した表である.

	G_1	G_1^*	理論解
P_2	0.35041	0.44668	0.444444 (4/9)
P_3	0.19492	0.25923	0.259259 (7/27)
P_4	0.11736	0.16580	0.166666 (1/6)
P_5	0.07073	0.10935	0.111111 (1/9)
P_6	0.03958	0.07177	0.074074 (2/27)
P_7	0.00172	0.04491	0.047619 (1/21)
P_8	—	0.02476	0.027777 (1/36)
F	11.71582	14.13779	13.964304 (40π/9)

	G_4	G_4^*	理論解
P_2	0.44261	0.44445	0.444444 (4/9)
P_3	0.25802	0.25925	0.259259 (7/27)
P_4	0.16574	0.16666	0.166666 (1/6)
P_5	0.11037	0.11110	0.111111 (1/9)
P_6	0.07345	0.07407	0.074074 (2/27)
P_7	0.04709	0.04761	0.047619 (1/21)
P_8	0.02732	0.02778	0.027777 (1/36)
F	12.94066	12.98364	13.964304 (40π/9)

G_4, G_4^* は連立2560元1次方程式を解くのに Fortran 90 を Unix 上で5.5時間走らせた結果である. この表より, G_4^* で G_4 の値に近似できることが分かる. こうして, 球面を拡大近似することにより, 数値解の精度が上がることを示された.

2.4 非有界領域における数値解

R^3 における非有界領域 D とその境界を

$$D = R^3 - \{x; |x| \leq 1\} - \{|x - P_{10}| \leq 1\}$$

$$\alpha_0 = \{x; |x - P_{10}| = 1\}, \alpha_1 = \{x; |x| = 1\}$$

とする。ここで、 $P_{10} = (10, 0, 0)$ である。 D におけるディリクレ問題を境界要素法で解く。近似は第3段階の拡大近似 G_3^* で求めた。

数値結果の精度を求めるために

$$P^* = \left(\frac{10}{99}, 0, 0\right), r = \frac{1}{99}$$

とおく。非有界領域 D は単位球 $S_1 = \{x; |x| < 1\}$ に関するケルビン変換により、

$$D_1 = \{x; |x| < 1\} - \{x; |x - P^*| \leq r\}$$

に移る。 D 上の点 $P = (n, 0, 0)$ (n は整数) は、ケルビン変換により、 D_1 内の点 $Q = (\frac{1}{n}, 0, 0)$ に移る。今、

$$u_0(P) = \frac{89}{88} \left(1 - \frac{1}{99r(P)}\right)$$

$$u_1(P) = \frac{109}{108} \left(1 - \frac{1}{99r(P)}\right)$$

($r(P)$ は点 P^* と変数 P との距離)

とおくと、調和関数の最大値、最小値原理により

$$u_1(P) \leq u(P) \leq u_0(P)$$

となる。 $n = 2, 3, \dots, 8$ とし、 $u(P)$ の計算結果と、 $u_1(P)$ 、 $u_0(P)$ との値を比較する。

	$u_1(P)$	$u(P)$	$u_0(P)$
P_2	0.49185	0.49268	0.49288
P_3	0.32179	0.32227	0.32246
P_4	0.23521	0.23554	0.23569
P_5	0.18126	0.18149	0.18163
P_6	0.14233	0.14251	0.14263
P_7	0.10938	0.10951	0.10961
P_8	0.07304	0.07312	0.07319

これにより $u(P)$ の値は小数点以下3桁まで正しいことが示された。

3. 混合形境界値問題

3.1 問題設定

R^3 における非有界領域 D とその境界を

$$D = R^3 - \{x; |x| \leq 1\} - \{|x - P_{10}| \leq 1\}$$

$$- \{x; |x + P_5| \leq 1\} - \{x; |x - P_5| \leq 1\}$$

$$\alpha_0 = \{x; |x - P_{10}| = 1\}, \alpha_1 = \{x; |x| = 1\}$$

$$\beta_0 = \{x; |x - P_5| = 1\}, \beta_1 = \{x; |x + P_5| = 1\}$$

とする。ここで、 $P_i = (i, 0, 0)$ である。 D における境界値問題

$$\Delta u = 0 \quad (x \in D)$$

$$u = 0 \quad (x \in \alpha_0)$$

$$u = 1 \quad (x \in \alpha_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (x \in \beta_0)$$

$$u = const, \int_{\beta_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (x \in \beta_1)$$

を境界要素法で解く。基礎となる式は、グリーン定理より得られる。それを離散化し、近似は第3段階の拡大近似 G_3^* で求め、連立1280元1次方程式へと変換してこの問題を解いた。

3.2 グラフ化と結果の検討

数値解 u_p をグラフ化したものを示す。 β_0 の近くでは、 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ の影響を受けて、極小的に値が等しくなり、グラフ的には平行になっているのが読み取れる。また、 β_1 の近くでは、 $u =$

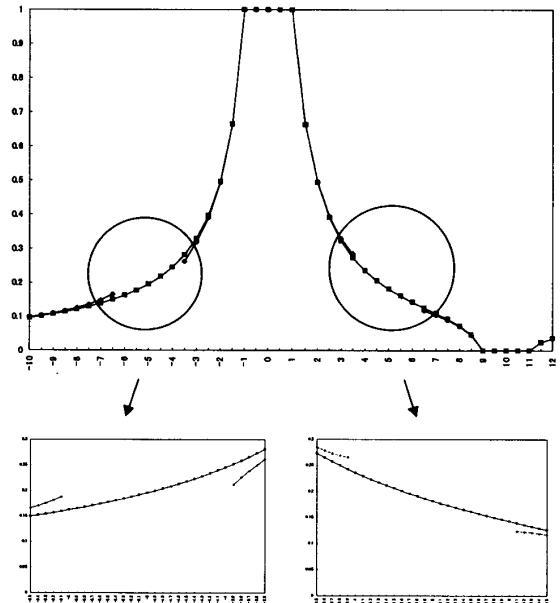


図2

const. なので, β_1 の左右の点 P_{-6}, P_{-4} における u の値が等しくなっているのが, 確かめられる. 数値解は, 小数点以下2桁までは正しいと思われる.

3.3 曲線族の 2-module

非有界領域 D , その境界と D 内のコンパクト集合 E を

$$\begin{aligned} D &= R^3 - \{x; |x| \leq 1\} - \{|x - P_{10}| \leq 1\} \\ \alpha_0 &= \{x; |-P_{10}| = 1\}, \alpha_1 = \{x; |x| = 1\} \\ E &= \{x; |x - P_5| \leq 1\} \end{aligned}$$

とする. 曲線族 Γ に対する 2-module を $M_2(\Gamma)$ で表す^{4),5)}. $\Gamma(\alpha_0, \alpha_1; D)$ は D 内で α_0 と α_1 を結ぶ曲線族とし, $\Gamma_q(\alpha_0, \alpha_1; D-E)$ は $D-E$ 内で E を D 内の1点と見なして, α_0 と α_1 を結ぶ曲線族とする.

2-module $M_2(\Gamma(\alpha_0, \alpha_1; D-E))$ は α_1 上の u の外法線方向微分 $\frac{\partial u}{\partial n}$ の積分, 即ち flux $\int_{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial n} dS$ に等しい. それらの数値を比較すると,

$$\begin{aligned} M_2(\Gamma(\alpha_0, \alpha_1; D-E)) &= 15.06057 \\ M_2(\Gamma(\alpha_0, \alpha_1; D)) &= 15.07618 \\ M_2(\Gamma_q(\alpha_0, \alpha_1; D-E)) &= 15.10687 \end{aligned}$$

となり理論的な不等式⁵⁾を満たしていることが数値的に確かめられた.

4. ま と め

厳密解の求まっていない問題を解き, とても興味深い結果になった. 正20面体を少し膨らませるという方法により, 数値解の精度が2桁も上がることが確かめられた. 球面 S を平面三角形で近似するには, 理論的にもコンピューターのメモリのにも限界がある. しかし, 第5近似 G_5 で連立10240元1次方程式を解いて数値解の精度を確かめたかった.

また, flux の値が理論値と相当にかけ離れていることが分かった. これを改良する余地はある. 今後は, S を平面三角形 T_j で近似するのではなく, 直接, 球面三角形 σ_j で離散化する方向で検討したい.

文 献

- 1) 水本久夫, 原 平八郎 (1985) FORTRAN による境界要素法の基礎. サイエンス社.
- 2) Kellogg OD (1929) *Foundations of potential theory*, Springer.
- 3) 大津賀 信 (1957) 函数論特論. 現代数学講座, 共立出版.
- 4) Rodin B and Sario L (1968) *Principal functions*, D. Van Nostrand, Princeton.
- 5) Yamamoto H (1980) On null sets for extremal distances of order 2 and harmonic functions. *Hiroshima Math. J.* 10, 437-467.