

原 著

## 複素対数写像 $Z_{n+1} = \ln Z_n + C$ のスケーリング則

田中 昌昭<sup>1)</sup> 川部 健<sup>2)</sup>

川崎医療福祉大学 医療技術部 医療情報学科<sup>1)</sup>

岡山大学 理学部 物理学科<sup>2)</sup>

(平成 5 年11月17日受理)

## Scaling Law of the Complex Logarithmic Map $Z_{n+1} = \ln Z_n + C$

Masaaki TANAKA<sup>1)</sup> and Takeshi KAWABE<sup>2)</sup>

*Department of Medical Informatics,  
Faculty of Medical Professions  
Kawasaki University of Medical Welfare<sup>1)</sup>*

*Kurashiki, 701-01, Japan*

*Department of Physics,*

*Okayama University<sup>2)</sup>*

*Okayama, 700, Japan*

*(Accepted Nov. 17, 1993)*

**Key words** : scaling property, Mandelbrot sets, circle map,  
period-adding rule, 2-frequency system

### Abstract

Scaling property of the complex logarithmic map  $Z \rightarrow \ln Z + C$  is investigated. We find that the area of  $k$ -periodic points region in the Mandelbrot sets is scaled by  $k^{-6}$ , which is explained by the circle map that is embedded in the complex logarithmic map. The period-adding rule can be also clarified by the use of nature in the circle map. In relation to the period-adding phenomena, a devil's staircase appears along the boundary with the fixed points region.

A variety of the phenomena which is seen in the complex logarithmic map is the consequence of the *2-frequency system* which lies behind this map.

### 要 約

複素対数写像  $Z \rightarrow \ln Z + C$  のスケーリング則について報告する。我々はこの写像のマンデルブロ集合における  $k$ -周期解領域の面積は  $k^{-6}$  でスケールされることを見出した。これは

対数写像に埋め込まれた円写像によって説明することができる。周期加算則もまたこの円写像の性質を用いることによって解明できる。周期加算則に関連して固定点領域との境界線に沿って悪魔の階段が現れることも示す。

複素対数写像に見られるこのような現象は、この写像の背後にある、いわゆる 2-frequency system に起因する。

## 1 はじめに

非線形散逸力学系におけるカオス発生への代表的なシナリオとして、モードロッキングを伴う準周期運動（トーラス）からカオスへの遷移がある<sup>1)</sup>。この問題は1980年代の初頭に多くの研究者によって精力的に研究され、遷移点近傍での様々な性質が明らかにされてきた<sup>2)-5)</sup>。

準周期運動からカオスへの遷移の本質的なメカニズムは2つの振動子が非線形相互作用を通して結合する、いわゆる**2-frequency system**にある。したがって、これは物理現象でよく見かける周期的な外力にさらされた振動子の振る舞いに普遍的に見られる性質である。例えば周期的な外力のもとで駆動された振り子の運動 (Driven Pendulum) や Forced Rayleigh-Bénard Convection はこの典型であろう。さらに Belousov-Zhabotinsky Reaction などの結合振動子系にもこの現象がみられる<sup>6)</sup>。

**2-frequency system** を記述するもっとも簡単でポピュラーなモデルに円写像（サークルマップ）がある。

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + g(\theta_n) \pmod{1} \quad (1)$$

ここで  $g(\theta)$  は周期的性質

$$g(\theta) = g(\theta+1)$$

を満たす  $\theta$  の非線形関数である。 $\Omega$  は **2-frequency system** の2つの振動数の比を表し、 $g(\theta)$  はそれらの非線形結合である。非線形項  $g(\theta)$  がない場合、写像(1)は有理数  $\Omega = P/Q$  に対して周期解を与えるが、非線形項があると  $\Omega$  の有限な区間にわたって周期解が安定化される。これはモードロッキングと呼ばれ、結合振動子系の resonance あるいは同期現象と解釈される。 $g(\theta)$  の非線形性を特徴づけるパラメタを  $K$  としよう。2つのパラメタ  $\Omega$  と  $K$  によって張ら

れるパラメタ空間で resonance（モードロッキング）が現れる領域は研究者の名にちなんで Arnold の舌と呼ばれている。非線形相互作用  $g(\theta)$  がある臨界点（写像(1)が不可逆となる点）を超えると  $\Omega$  の異なる resonance 領域が重なり始める。系のオカティックな振る舞いは、異なる resonance の間の相互作用によって引き起こされると解釈される。

上で述べた resonance 現象は2次元写像において一般的に現れることが示されている<sup>7)</sup>。2次元写像の固定点が Hopf bifurcation を伴って不安定化するとき、即ち固有値が複素平面上で0あるいは  $\pi$  でない偏角で単位円を横切るとき、Arnold の舌が現れる。固有値の偏角  $\alpha$  が、 $\alpha = \frac{P}{Q}\pi$  の場合、対応する Arnold の舌は  $Q$ -周期のモードロッキング状態になっている。

この論文では複素対数写像<sup>8)</sup>

$$Z_{n+1} = \ln Z_n + C \quad (2)$$

について、これまで述べた **2-frequency system** との関連について調べていく。写像(2)は明らかに2次元写像の1つであり、モードロッキングや準周期的な振る舞いからカオスへの遷移など **2-frequency system** の持つ普遍的な性質が現れることが期待される。事実ある条件下ではモードロッキングが現れ、他の典型的なモデルが示すフラクタルな性質やスケーリング則なども示された。しかし、少なくとも数値実験の範囲内ではカオスを見いだすことができなかった ( $Z$  の偏角に適切な条件をつけた場合にはカオスが現れる)。これについては §5 で触れる。

§2 では複素対数写像と円写像の関係について議論する。そこでは、ある特定のパラメタ領域上で、複素対数写像の中に円写像が埋め込まれていることを示す。

§3 では前の論文<sup>8)</sup>でコンピュータシミュレーションによって示した周期加算則の理論的な解

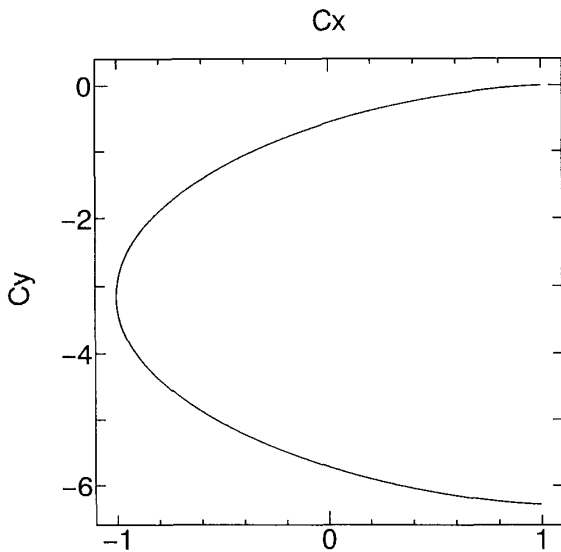


Fig. 1 The boundary where the fixed points become unstable is cycloid curve in the complex parameter plane.

積をこころみる。周期加算則に関連して悪魔の階段が現れることも示す。

複素対数写像の持つスケーリング則についての数値計算の結果とそれに対する解析的な評価は §4 で行う。我々の得た結果はサインサークルマップや結合ロジスティックマップに対して得られた結果<sup>9)</sup>と一致するものであった。

最後に §5 で、複素対数写像の持つ、他のモデルには見られない特異な性質について述べる。また、ここでは残された多くの問題点、特に解析的なアプローチの限界にも言及する。

## 2 複素対数写像の中に埋め込まれた円写像

ここでは複素対数写像(2)のローカルな性質について調べる。ある特定のパラメタ領域に対して写像(2)が円写像に還元できることを示すのがここでの目的である。

写像(2)を成分表示すると

$$\begin{cases} X_{n+1} = \ln R_n + C_x \\ Y_{n+1} = \theta_n + C_y \end{cases} \quad (3)$$

となる。ここで  $R_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$ ,  $\theta_n = \arctan(Y_n/X_n)$  である。この写像の固定点を  $Z^* = (X^*, Y^*)$  とし、その安定性を調べるために固定点からの微小なずれ  $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n)$  を

$$Z_n = Z^* + \zeta_n \quad (4)$$

で定義して(2)式を線形化すると、 $\zeta_n$  は

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^*} \begin{pmatrix} \cos \theta^* & \sin \theta^* \\ -\sin \theta^* & \cos \theta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

に従う。これは動径方向に  $1/R^*$  倍され、角度  $-\theta^*$  の回転を表わすので、固定点が不安定化する境界は  $R^* = 1$  で与えられる。そしてこの分岐は **Hopf bifurcation** である。

次に固定点が不安定化する境界について詳しく調べてみよう。(2)式を極座標で表わすと

$$R_{n+1} \exp(i\theta_{n+1}) = \ln R_n + i\theta_n + C$$

で、固定点が不安定化する境界  $R^* = 1$  では

$$\exp(i\theta^*) = i\theta^* + C \quad (6)$$

となる。これは複素パラメタ平面上で Fig. 1 に示すようなサイクロイド曲線を表わしている。またこのときの固定点は単位円

$$Z^* = \exp(i\theta^*) \quad (7)$$

の上にある。

以下では議論をパラメタ  $C$  が(6)式で示されるサイクロイド曲線上にある場合に限定する。 $C$  の代わりに  $\theta^* = 2\pi\Omega$  で定義される新しいパラメタ  $\Omega$  を導入すると(6)式は

$$C = \exp(i2\pi\Omega) - i2\pi\Omega \quad (8)$$

となり、(7)式は

$$Z^* = \exp(i2\pi\Omega) \quad (9)$$

と表わされる。

次に(2)式へ(4)式を代入して、(8)、(9)式を考慮すると

$$\exp(i2\pi\Omega) + \zeta_{n+1} = \ln[\exp(i2\pi\Omega) + \zeta_n] + \exp(i2\pi\Omega) - i2\pi\Omega$$

となり、対数のアーギュメントの中から  $\exp(i2\pi\Omega)$  をくくり出すことによって

$$\zeta_{n+1} = \ln[1 + \zeta_n \exp(-i2\pi\Omega)] \quad (10)$$

を得る。

ここで  $\zeta_n = \rho_n e^{i2\pi\varphi_n}$  とおき

$$\rho_n = Const. \equiv \rho \ll 1 \tag{11}$$

を仮定すれば(10)式は

$$\begin{aligned} \rho_n e^{i2\pi\varphi_{n+1}} &= \ln[1 + \rho e^{i2\pi(\varphi_n - \Omega)}] \\ &= \rho_n e^{i2\pi(\varphi_n - \Omega)} \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho e^{i2\pi(\varphi_n - \Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \rho^2 e^{i4\pi(\varphi_n - \Omega)} - \dots \right]. \end{aligned}$$

両辺の対数をとって  $2\pi i$  で割ると

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n - \Omega + \frac{1}{2\pi i} \ln \left[ 1 - \frac{1}{2} \rho e^{i2\pi(\varphi_n - \Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \rho^2 e^{i4\pi(\varphi_n - \Omega)} - \dots \right] \end{aligned}$$

ここで、更に  $\varphi_n - \Omega \equiv \psi_n$  とおき、右辺の対数を展開して虚数部だけを取り出せば、 $\psi_n$  についての

$$\psi_{n+1} = \psi_n - \Omega + g(\psi_n) \tag{12}$$

という1次元写像が得られる。ここで  $g(\psi)$  は

$$g(\psi) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \rho \sin 2\pi\psi + \frac{5}{24} \rho^2 \sin^2 4\pi\psi - \dots \right)$$

で与えられる  $\psi$  の非線形関数である。

(12)式は円写像(1)に他ならない。したがって、パラメタ  $C$  が(8)式で与えられるサイクロイド上にある場合、対数写像(2)は円写像に還元できることが示された。

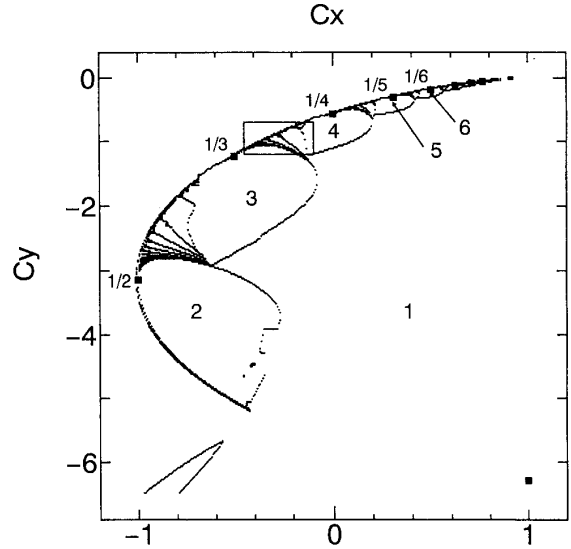


Fig. 2-2 The points corresponding to  $\Omega=1/2, 1/3, \dots$  on the cycloid  $C = \exp(i2\pi\Omega) - i2\pi\Omega$  are plotted (■). There is obvious relationship between the periodic regions and the points on the cycloid curve.

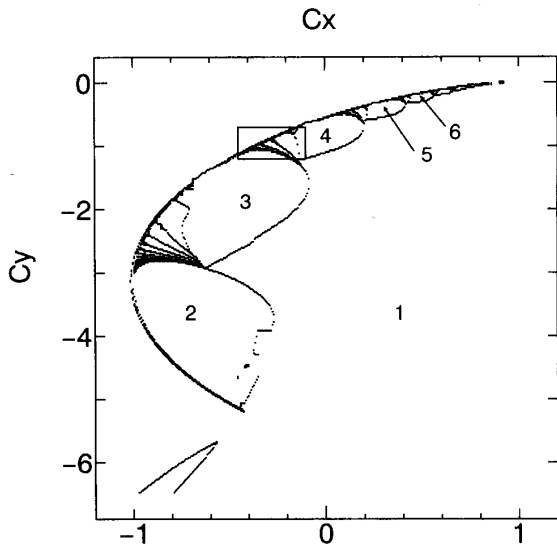


Fig. 2-1 Mandelbrot sets of logarithmic map  $Z \mapsto \ln Z + C$  for the case of  $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ . The number (1, 2, 3, ...) is the period of the stable cycle.

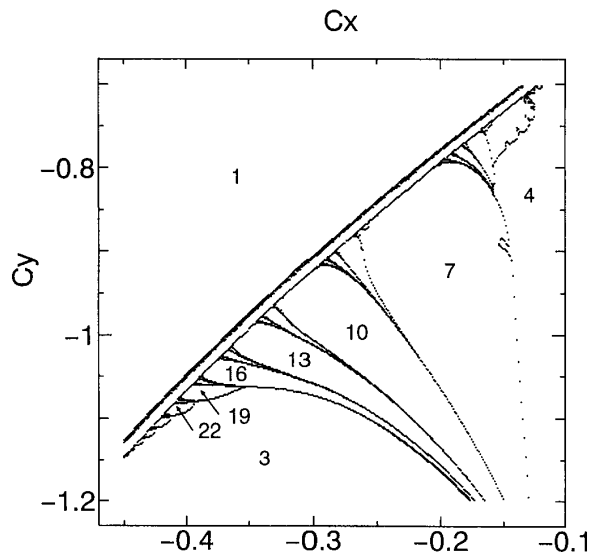


Fig. 3-1 A small box in Fig. 2-1. is enlarged. We can find  $(3k+1)$  -sequence of periodic cycle.

### 3 周期加算則と悪魔の階段

前の論文<sup>8)</sup>では、複素パラメタ平面上のマンデルブロ集合に周期加算則が現れることを、コンピュータシミュレーションによって示した。ここでは、前節で得た結論にもとづいて、この周期加算則の理論的な解釈をこころみる。

Fig. 2-1. は  $Z_n$  の偏角を  $\frac{\pi}{2} < \arg(Z_n) < \frac{3\pi}{2}$  にとって場合 (本論文の数値解析はすべてこのようにしている) の、パラメタ平面  $C$  上でのマンデルブロ集合を示したものである。図中に記入してある数字は  $Z_n$  の周期を表している。Fig. 2-2. はサイクロイド曲線(8)上で、 $\Omega = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  に対応する点をプロットしたものである。Fig. 3-1, 3-2. はそれぞれ、Fig. 2-1, 2-2. の枠で囲んだ領域を拡大したものである。図からわかるように、周期解領域とサイクロイド上の点には明確な対応関係がある。

前節でサイクロイド曲線上には(12)式で与えられる円写像が埋め込まれていることを見いだした。したがって、サイクロイド内部に広がる周期解領域の島は円写像のアナロジーから Arnold の舌と解釈できる。

次にパラメタ  $\Omega$  と周期の関係調べるために、

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n - \psi_0}{n}$$

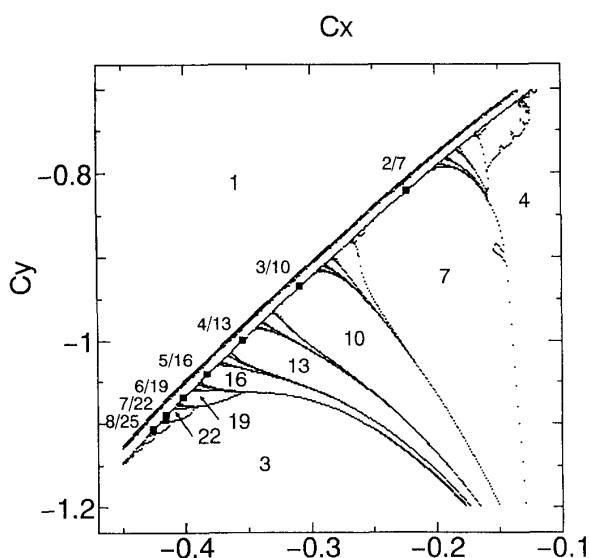


Fig. 3-2 A small box in Fig. 2-2. is enlarged.

で定義される回転数  $W$  を導入する。非線形項  $g(\psi)$  がない場合は、(12)式で与えられる写像に対して回転数  $W$  は

$$W = 1 - \Omega$$

となる。

$\Omega$  が  $\Omega = P/Q$  で表される有理数の場合、回転数は

$$\begin{aligned} W &= 1 - \frac{P}{Q} \\ &= \frac{Q-P}{Q} \end{aligned}$$

となり、これは  $Q$ -周期解を与える。

Fig. 4. には周期解領域の回転数と、対応するサイクロイド上の  $\Omega$  の値を示している。図から上記に述べた関係が成立していることがわかる。

更に、Fig. 4. では  $W = \frac{7}{10} (\Omega = \frac{3}{10})$  の10-周期解と  $W = \frac{5}{7} (\Omega = \frac{2}{7})$  の7-周期解の間に  $W = \frac{12}{17} (\Omega = \frac{5}{17})$  の17-周期解が存在するのがわかる。一般的に  $Q$ -周期解と  $S$ -周期解の間には  $(Q+S)$ -周期解が存在するといった周期加算則が成立している。

これは次のように解釈できる。

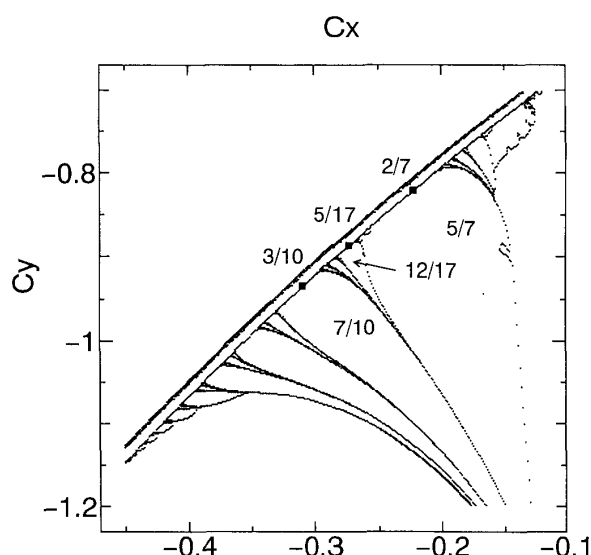


Fig. 4 The fraction in the periodic region represents winding number. The winding number  $W$  is related to  $\Omega$  by  $W = 1 - \Omega$ . Period adding-rule can be found to hold

有理数の性質から、2つの有理数  $\frac{P}{Q}$  と  $\frac{R}{S}$  の間には  $\frac{P}{Q} < \frac{P+R}{Q+S} < \frac{R}{S}$  なる有理数  $\frac{P+R}{Q+S}$  がある。したがって、サイクロイド曲線に沿って  $\Omega = \frac{P}{Q}$  に対応する  $Q$ -周期解と  $\Omega = \frac{R}{S}$  に対応する  $S$ -周期解の間には  $\Omega = \frac{P+R}{Q+S}$  に対応する  $(Q+S)$ -周

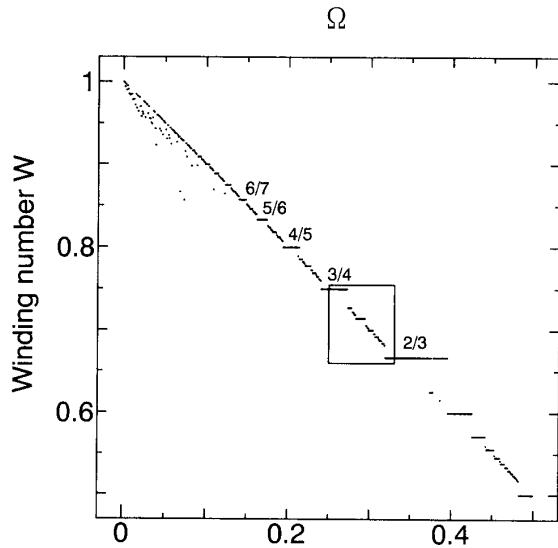


Fig. 5-1 Winding number  $W$  vs  $\Omega$  is plotted along the cycloid curve. The "Devil's staircase" is clearly found. The fraction above the plateau represents winding number.

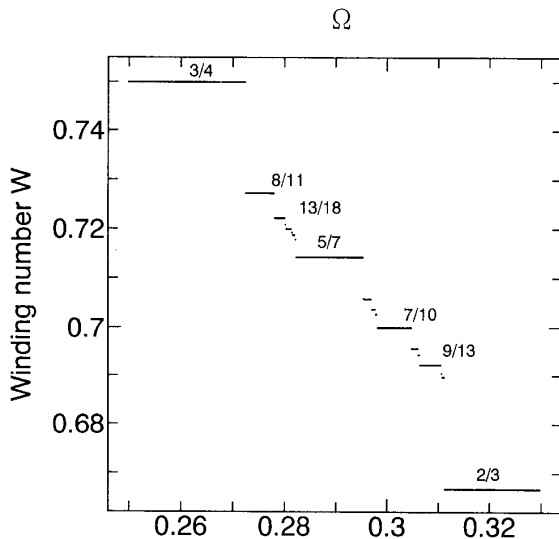


Fig. 5-2 A small box in Fig. 5-1. is enlarged. Fine structure is not complete because of the initial condition dependence.

期解が存在する。

次に、非線形項の存在が  $\Omega$  の有限な範囲にわたって周期解を安定化（モードロッキング）することを見ていこう。

Fig. 5-1. はサイクロイド曲線に沿って、横軸に  $\Omega$ 、縦軸に回転数  $W$  をプロットしたものである。Fig. 5-2. は Fig. 5-1. の枠で囲まれた部分を拡大したものである。図中の分数は、対応する階段の回転数である。図から微細構造を持った悪魔の階段が現れていることがわかる。

サインサークルマップでは、悪魔の階段の fractal 次元として 0.87 という値が得られている<sup>4)</sup>。更に、この値はサインサークルマップに限らず、3 次の変曲点を持つ写像に対してユニバーサルな値であることが報告されている。残念ながら我々の悪魔の階段は完全なものではない。というのは初期条件によってサイクロイド周辺の地形が変わってくるため、悪魔の階段に完全な微細構造が見られないのである。この問題については §5 で触れることになる。

いずれにせよ、対数写像に埋め込まれた円写像との関連から、マンデルブロ集合に見られる周期加算則に対する解析的な解釈が得られた。結合ロジスティックマップに対しても周期加算則が報告されているが<sup>10)</sup>、これは 2 次元写像に見られる普遍的な性質であり、その背後には **2-frequency system** が隠されている。

#### 4 スケーリング則

複素対数写像のマンデルブロ集合に見られる周期加算則において、パラメタのスケーリング則を見いだすこと（特にその臨界指数の決定）は、前の論文<sup>8)</sup>からの懸案事項であった。しかし、パラメタ空間が 2 次元であること、したがって周期解領域の境界が曲線になることが、その数値的な解析を困難にしていた。そこで、いったんパラメタの長さについてのスケーリング則をあきらめて、周期解を与えるパラメタ領域の面積についてのスケーリング則を調べてみることにする。これは、パラメタ空間が 2 次元であることから、ある意味ではもっともなアプローチといえる。

Fig. 2-1. に見られる、周期が 2, 3, 4, ...

というシーケンスに対して、周期解領域の面積  $S(k)$  とし周期  $k$  を両対数座標でプロットしたのが Fig. 6. である. あきらかにスケーリング則が存在し、グラフの勾配から

$$S(k) \sim k^{-6.12} \quad (13)$$

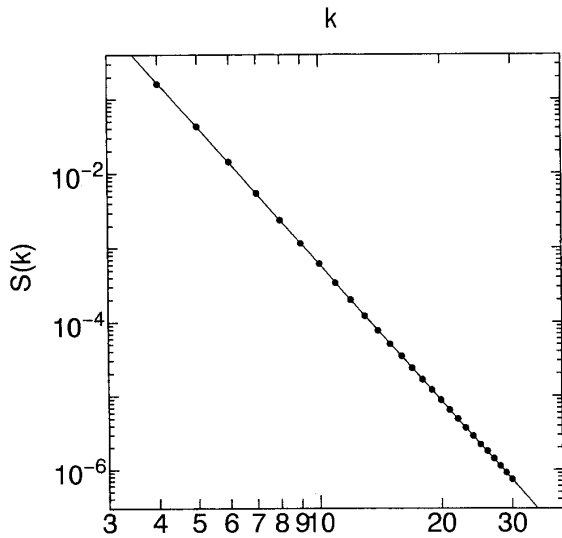


Fig. 6 Plots of  $S(k)$  vs  $k$ . The slope determined by the least square method gives the scaling law  $S(k) \sim k^{-6.12}$ .

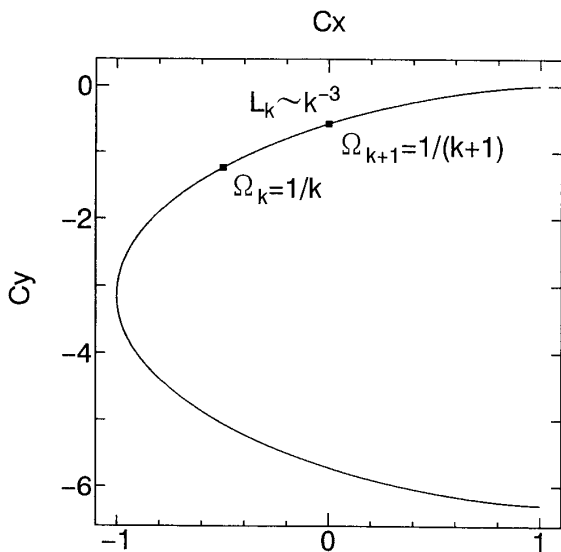


Fig. 7 A distance  $L(k)$  between  $\Omega_k$  and  $\Omega_{k+1}$  characterizes the length of the periodic region in the Mandebrot sets.

が得られる.

次の段階は、数値実験で得られた上記のスケーリング則を裏付けることである. 前にも述べたとおり、サイクロイドの内部に現れる  $k$ -周期解とサイクロイド上の  $\Omega = \frac{1}{k}$  に相当する点 (以下でこれを  $\Omega_k$  と記すことにする) の間には明確な対応関係がある (Fig. 2-2. 参照). したがって、Fig 7. に示したサイクロイド上の2点  $\Omega_k$  と  $\Omega_{k+1}$  の長さ  $L(k)$  は、 $k$ -周期解のパラメタ領域を特徴付ける長さともみなしてもよいであろう.

$L(k)$  は簡単に計算でき

$$\begin{aligned} L(k) &\equiv \overline{\Omega_{k+1}\Omega_k} \\ &= \int_{\Omega_{k+1}}^{\Omega_k} \sqrt{\Delta C_x^2 + \Delta C_y^2} \\ &= 4\pi \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \sin(\pi\Omega) d\Omega \\ &= 4\left(\cos \frac{\pi}{k+1} - \cos \frac{\pi}{k}\right) \\ &\sim \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ &\sim \frac{1}{k^3} \end{aligned} \quad (14)$$

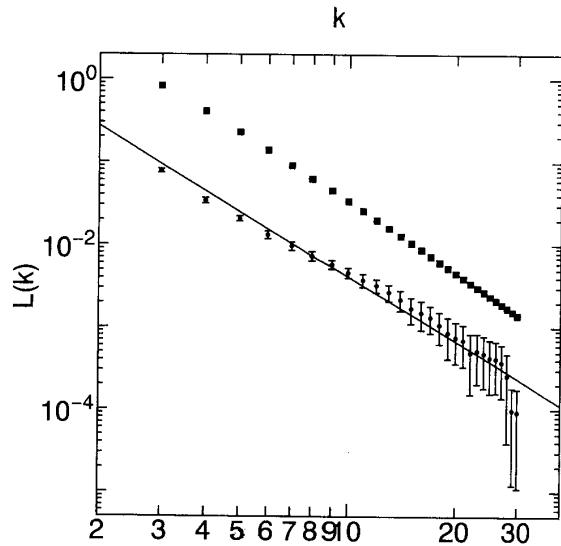


Fig. 8 Plot of  $L(k)$  vs  $k(\cdot)$ . The slope determined by the least square method gives the scaling law  $L(k) \sim k^{-2.6}$ .  $L(k)$  is calculated over 1000 random initial conditions. For the sake of comparison,  $L(k) \sim k^{-3}$  is also plotted (■).

という結果が得られる.

つまり, 周期加算則のパラメタ領域を特徴付ける長さは  $k^{-3}$  でスケールされる. 更に, 周期が 2, 3, 4, ... という  $k$ -シーケンスだけでなく, 他のシーケンス, 例えば  $(2k+1)$  シーケンス,  $(3k+1)$  シーケンス, ... 一般に  $(nk+1)$  シーケンスに対しても(14)式と同様な結果が得られる.

また,  $\mathcal{L}(k)$  を

$$\mathcal{L}(k) \equiv \Omega_\infty \Omega_k$$

と定義すれば

$$\mathcal{L}(k) \sim k^{-2}$$

となるのが容易に示される. これは Kaneko によって, サインサークルマップや結合ロジスティックマップに対して得られた結果と一致する<sup>9)</sup>.

こうして面積  $S(k)$  に対しては

$$S(k) \sim L(k)^2 \sim k^{-6} \quad (15)$$

というスケーリング則が成立するものと考えられ, 我々が数値実験で得た臨界指数の値 6.12 とよい一致を示している.

この節を終えるにあたり, (14)式を確認するための数値実験の結果を示しておく. Fig. 8. はサイクロイド上で  $k$ -周期解が現れる領域の長さ  $L(k)$  と周期  $k$  を両対数座標でプロットしたものである.  $L(k)$  は 1000 個のランダムに与えた初期条件に対して平均をとっている.

最小 2 乗法より

$$L(k) \sim k^{-2.6} \quad (16)$$

という結果を得た. 参考のため, (14)式で得られる  $L(k)$  の理論値もプロットしておいた.

前にも述べたように, サイクロイド周辺の地形が初期条件によって変わるため, その影響を除去するためにランダムな初期条件によるアンサンブル平均をとったのだが, それにもかかわらずここで得られた結果はあまり芳しいものではない. これについては次節で触れる.

## 5 Discussion

複素対数写像のマンデルブロ集合に見られる

2つの性質

- ・周期加算則
- ・スケーリング則

について調べた. これらの性質は, この写像の中に埋め込まれている円写像を抽出することによって明らかにすることができた.

ところで, 我々は議論を進めてくいで, サイクロイド上で得られた結果がサイクロイド内部にも適用できるという暗黙の仮定を行っていた. しかし果たしてそうだろうか? これまでのところ, サイクロイド内部については解析的な結果は何も得ていないのである. 事実,  $Z_n$  の偏角を定義するのに別のブランチ ( $Z_n$  の偏角は  $\arg(Z_n) = \arctan(Y_n/X_n)$  で定義されるが,  $\arctan$  の多価性ゆえに  $Z_n$  を一義的に決めるためには  $-\alpha < \arg(Z_n) < 2\pi - \alpha$  のように適当なブランチ  $\alpha$  を入れる必要がある. 本論文の数値解析では  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  とした) を用いた場合, サイクロイド内部の地図は極端に変わってくる. 我々の数値実験によれば  $0 < \arg(Z_n) < 2\pi$  の場合は, サイクロイドの内部全体に周期解領域が広がり, そこではもはや(15)式で与えられる面積についてのスケーリング則は成立しない. また,  $-\pi < \arg(Z_n) < \pi$  の場合は周期解が現れない. このように, ブランチのとり方によって系の振る舞いが大きく変わるのは, 系の持つ対称性に関係があるのではないかと思われる.

いずれにせよ

- ・サイクロイド内部の dynamics の解明
- ・ブランチのとり方が系の振る舞いに及ぼす影響

の 2 点は, 今後の課題として残されている.

数値解析を困難にしている原因に, 初期条件の与え方によってマンデルブロ集合の様相が変わってくるという現象がある. この初期条件依存性はサイクロイド周辺に顕著にみられる. そのため, §3 で述べたように悪魔の階段に完全な微細構造が見られなかった. また §4 で示した長さのスケーリングの指数が面積の指数に比べて理論値と大きく食い違っていたのもこのためであろう. この初期条件依存性はアトラクタが複数であることの現れであり, それ自体, 多くの非線形散逸力学系に見られる現象で, 決して



珍しいことではない。通常の **2-frequency system** では、サインサークルマップがそうであるように、非線形性があるしきい値を越えると Arnold の舌 (resonance) が重り合うようになり、その相互作用によってカオスが現れる。ところが、我々の数値実験の範囲内では、複素対数写像にカオスを見い出すことができなかった。これは、この写像が可逆写像であるためである。

パラメタ空間が2次元である場合、我々が提示したように面積によってスケーリング則を調べるのは有効な方法である。特に、マンデルブロ集合の周期解領域に特徴的な長さを定義できないようなケースでは、この方法によって系の持つスケーリング則を明らかにすることができる。これについては、別な写像に適用した結果をどこかで報告したい。

## 文 献

- 1) Ruelle D, Takens F (1971) On the Nature of Turbulence, *Communication of Mathematical Physics* **20**, 167.
- 2) Shenker SJ (1982) Scalling Behavior in a Map of a Circle onto itself : Empirical Result, *Physica* **5** D, 405.
- 3) Rand D, Ostlund S, Sethna J, and Siggia ED (1982) Universal Transition from Quasiperiodicity to Chaos in Dissipative Systems, *Physical Review Letter*, **49**, 132.
- 4) Jensen MH, Bak P, and Bohr T (1983) Devil's Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map, *Physical Review Letter* **50**, 1637., (1984) Transition to Chaos by Interaction of Resonances in Dissipative Systems, *Physical Review* **A30**, 1960.
- 5) Cvitanovic P, Jensen MH, Kadanoff LP, and Proaccial I (1985) Renormalization, Unstable Manifolds, and the Fractal Structure of Mode Locking, *Physical Review Letter* **55**, 343.
- 6) Schuster HG (1989) *Deterministic Chaos* pp. 145. Physik-Verlag, Weinheim, FRG
- 7) Rasband NS (1990) *Chaotic Dynamics of Nonlinear system* pp. 128. Wiley, New York
- 8) Kawkbe T, Kondo Y (1993) Bifurcation of the Complex Dynamical System  $Z_{n+1} = \ln(Z_n) + C$ , *Journal of Physical Society of Japan* **62**, 497.
- 9) Kaneko K (1982) On the Period-Adding Phenomena at the Frequency Locking in a One-Dimensional Mapping, *Progress of Theoretical Physics* **68**, 669., (1983) Transition from Torus to Chaos Accompanied by Frequency Locking with Symmetry Breaking, *Progress of Theoretical Physics* **69**, 1427., (1983) Similarity Structure and Scaling Property of the Period-Adding Phenomena, *Progress of Theoretical Physics* **69**, 403.
- 10) Satoh K, Aihara T (1990) Selfsimilar Structures in the Phase Diagram of a Coupled Logistic Map, *Journal of Physical Society of Japan* **59**, 1123.